Universität des Saarlandes
FR 6.1 Mathematik
Prof. Dr. G. Weitze-Schmithüsen
M.Sc. M. Kany
M.Sc. C. Steinhart

11. Übungsblatt zur Linearen Algebra I

Basen, Darstellungsmatrizen, Basiswechsel, Homomorphisatz, Rang einer Matrix, endliche Körper

Aufgabe 1. ((Gruppe) 2P+2P+2Bonuspunkte)

a) Gegeben sei die geordnete Basis $B := (b_1, b_2, b_3, b_4)$ von $\mathbb{R}^4$ mit:

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad b_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und die Standardbasis $S := (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix D_{BS} und schreiben Sie die Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_4 \in \mathbb{R}^4$ als Linearkombination von b_1, b_2, b_3 und b_4.
Hinweis: Sie dürfen die Lösung von Blatt 8 verwenden.

b) Sei B wie in Teil a) und die lineare Abbildung

$$\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \quad , \quad x \mapsto \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 0 \\ -5 & 0 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ -8 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \cdot x$$

gegeben. Wie lautet die Darstellungsmatrix $D_{BB}(\phi)$?

c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $P_n := \{\sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}[X]$ der Vektorraum der Polynome von Grad kleiner oder gleich n. Weiterhin sei

$$\mathrm{der} : P_4 \to P_3 \quad , \quad f(X) \mapsto f'(X)$$

die Ableitungsabbildung [1]. Wie lautet die Darstellungsmatrix $D_{SB}(\mathrm{der})$ bezüglich der Basen

$$\begin{aligned} &S := (1, X, X^2, X^3) \text{ für } P_3 \\ \text{und } &B := (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4) \text{ für } P_4 \text{ mit:} \\ &b_0 = 1, \quad b_1 = 1 + X, \quad b_2 = 1 + X + 2X^2 \\ &b_3 = 1 + X + 2X^2 + 3X^3, \quad b_4 = 1 + X + 2X^2 + 3X^3 + 4X^4 \end{aligned}$$

[1] Nach Tutorium 8 wissen Sie bereits, dass dies eine lineare Abbildung ist.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 05. 02. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.

Aufgabe 2. ((Gruppe) 1,5P+1,5P+1P)

Sei K ein Körper, V, W zwei endlich-dimensionale[2] K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) ϕ ist genau dann injektiv, wenn für jede Basis B von V der Nullvektor nicht im Bild $\phi(B)$ von B liegt.

b) Sei B eine Basis von V. Dann ist ϕ genau dann surjektiv, wenn $\phi(B)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

c) ϕ ist genau dann bijektiv, wenn es eine Basis B von V bijektiv auf eine Basis $\phi(B)$ von W abbildet.

Aufgabe 3. ((Alleine) 1P+3P)

Wir betrachten die folgenden Untervektorräume von $\mathbb{R}^5$.

$$U := \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle, \quad V := \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\-2\\0\\-4\end{pmatrix} \right\rangle, \quad W := \left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\3\\2\\1\end{pmatrix} \right\rangle$$

a) Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von U ist.

b) Berechnen Sie dann die Dimensionen folgender Vektorräume:

(i) U/V,

(ii) $V + U$,

(iii) $U + W$,

(iv) $U/(W \cap U)$.

Hinweis: Berechnen sie zuerst die Dimensionen von U, V und W.

Aufgabe 4. ((Alleine) 4P)

Gegeben sei die Matrix

$$A := \begin{pmatrix}1 & 1 & 7\\1 & 3 & 9\\1 & -1 & 11\end{pmatrix}$$

Berechnen Sie jeweils den Rang von A über $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ und $\mathbb{F}_5$ und bestimmen Sie gegebenenfalls ihr Inverses.

[2] Das geht eigentlich auch für beliebige Vektorräume.

Das Übungsblatt kann bis spätestens Freitag den 05. 02. 2021 um 23:59 Uhr abgegeben werden. Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer aller Gruppenmitglieder sowie Ihre Übungsgruppe gut lesbar auf Ihre Abgabe. Es dürfen bis zu drei Personen gemeinsam in einer Übungsgruppe sein.